Katı cisim dinamiği

Vikipedi, özgür ansiklopedi

**Katı-cisim dinamiği**, dış kaynaklı kuvvetler karşısında hareket eden birbiri ile ilişkili sistemlerin analizini inceler. Her bir gövde için, cisimlerin katı olduğu ve bu nedenle uygulanan kuvvetler nedeni ile deforme olmadıkları, sistemi tanımlayan taşıma ve dönme parametrelerinin sayısını azaltarak analizi basitleştirmektedir.

Katı cisim dinamiğiNewton’un hareket yasalarından ve Lagrange mekaniğinden oluşan hareket denklemleri ile tanımlanmaktadır. Bu denklemlerin çözümleri, katı cisimlerin içinde olduğu sistemin değişimlerini zaman bağlı yapılandırmaktadır. Katı cisim dinamiğinin formülize edilmesi ve çözülmesi mekanik sistemlerin  bilgisayar benzetimlerinin önemli bir aracıdır.

[](http://tr.wikipedia.org/wiki/Dosya:SteamEngine_Boulton%26Watt_1784.png)

Movement of each of thecomponents of theBoulton&WattSteam Engine (1784) is modeledby a continuous set of rigiddisplacements

Düzlemsel katı cisim dinamiği[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=1) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=1)]

Eğer katı parçacıkların oluşturduğu bir sistemde her bir parçacığın izlediği yol sabit bir düzleme paralel olarak hareket ediyor ise, sistem düzlemsel hareket ile sınırlanmıştır. Bu durumda N parçacıktan oluşan Pi, i=1,…N katı cisim sistemi için Newton Kanunları basitleşir, çünkü k-yönünde hareket yoktur. Referans noktası olan R’de Sonuç kuvvet ve tork aşağıdaki denklemlerle elde edilir:

 \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{A}_i,\quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i-\mathbf{R})\times (m_i\mathbf{A}_i), 

Burada ri her bir parçacık için düzlemsel hareket yönünü gösteren vektördür. Katı cisim kinematikformülü Pi parçacığının referans bir parçacığa göre R konumunu ve A ivmelenmesini içeren denklemini ve açısal hız vektörü ile ivmelenme vektörü ‘yıda içeren yapıyı kapsar;

 \mathbf{A}_i = \alpha\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{R})  + \omega\times\omega\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{R})  + \mathbf{A}.

Düzlem üzerinde sınırlanmış bu hareket sistemleri içinaçısal hız ve açısal ivme vektörleri k boyunca ve hareket düzlemine dik olarak yönlendirmişlerdir; bu ivme denklemini de sabitleştirir. Bu durumda ivme vektörleri, referans noktası olan R’den ri noktasına birim vektörleri kullanarak ifade edilebilir ve birim vektörlerti=kxei olur.

 \mathbf{A}_i =  \alpha(\Delta r_i\mathbf{t}_{i}) - \omega^2(\Delta r_i\mathbf{e}_{i}) + \mathbf{A}.

Bu, sistemin sonuç vektörünün;

 \mathbf{F} = \alpha\sum_{i=1}^N m_i (\Delta r_i\mathbf{t}_{i}) - \omega^2\sum_{i=1}^N m_i (\Delta r_i\mathbf{e}_{i}) + (\sum_{i=1}^N m_i)\mathbf{A},

ve torkun

 \mathbf{T} =\sum_{i=1}^N (m_i\Delta r_i\mathbf{e}_i)\times (\alpha(\Delta r_i\mathbf{t}_{i}) - \omega^2(\Delta r_i\mathbf{e}_{i}) + \mathbf{A}) = (\sum_{i=1}^N m_i\Delta r_i^2)\alpha\vec{k} + (\sum_{i=1}^N m_i\Delta r_i\mathbf{e}_i)\times\mathbf{A}, 

olmasını sağlar.

Burada eixei=0, ve eixti=k bütün Pi parçacıkları için düzleme dik birim vektörlerdir. Kütle merkezi C referans nokta olarak kullanılırsa bu denklemler için Newton kanunları aşağıdaki gibi sadeleşir:

 \mathbf{F} = M\mathbf{A},\quad \mathbf{T} = I_C\alpha\vec{k},

Burada M toplam kütleyi, Ic katı cisim sisteminin kütle merkezinden geçen ve harekete dik eksen etrafındaki atalet momentini gösterir.

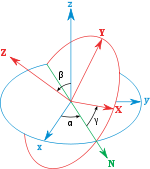
Üç Boyutlu Uzayda Katı Cisim[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=2) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=2)]

**Konumlama ve Yaklaşım Tanımları**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=3) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=3)]

*Esas Yazı: Dönmenin Üç Boyutlu Yapılandırılması*

Üç boyutlu uzayda katı cismin konumlandırılması için çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Bu metotların bir özeti bu bölümde verilmektedir.

**Euler Açıları**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=4) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=4)]

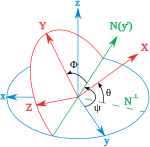
[](http://tr.wikipedia.org/wiki/Dosya:Eulerangles.svg)

Euler angles, one of thepossiblewaystodescribe an orientation

*Esas Makale: Euler açıları*

Konumlandırmanın ilk girişimleriniLeonhard Euler gerçekleştirmştir. Euler birbiri etrafında dönebilen üç çerçeve düşünmüş ve sabit bir çerçeveden başlayarak, üç adet dönüş ile herhangi bir referans çerçeve oluşturabileceğini keşfetmiştir. Bu üç dönüş değerine Euler açısı denilmektedir.

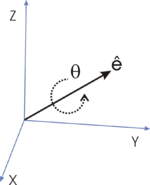
**Tait-Bryan Açıları**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=5) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=5)]

[](http://tr.wikipedia.org/wiki/Dosya:Taitbrianzyx.svg)

Tait–Bryanangles. Otherwayfordescribingorientation

*Esas Makale:*

Bu üç açı savrulma, dönme ve atılma ayrıca navigasyon veya Kardan açıları olarak da adlandırlmaktadır. Matematiksel olarak oniki setten oluşan Euler açılarının içinden altı olasılığı içeren bu konumlandırma bir cismin konumunu (örneğin bir uçağın konumu) belirlemekte en iyi yaklaşımdır. Havacılıkta genellikle Euler açıları olarak kullanılırlar.

[](http://tr.wikipedia.org/wiki/Dosya:Euler_AxisAngle.png)

A rotationrepresentedby an Euleraxisandangle.

**Oryantasyon Vektörü**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=6) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=6)]

*Esas Makale: Eksen Açısı ile tanımlama*

Euler ayrıca iki farklı eksen etrafında dönmenin, farklı bir eksen etrafında tek bir dönme olarak da ifade edilebileceğini fark etmişti (Euler’in dönme Teorisi). Bu durumda daha önce kullanılan üç açı tek bir dönmeyi ifade etmeli idi, bu eksenin hesaplanması dizey yöntemi geliştirilene kadar karmaşıktı. Bu bilgiler ışığında herhangi bir dönme işlemini ifade etmek için, dönme ekseni üzerinde bir vektör ve açı büyüklüğüne eşit bir modülü olan vektörel bir yaklaşım geliştirdi. Bu durumda herhangi bir dönme, bir referans noktadan tanımlana bilen bir dönme vektörü ile ifade edilebildi (bu vektör Euler vektörü olarak da adlandırılır). Bu vektör konumlama için kullanıldığında konumlama vektörü veya irtifa vektörü olarak adlandırılır. Eksen-açısı temsili olarak bilinen benzer bir metot, dönmeyi veya konumlandırmayı dönme ekseni üzerine yerleştirilmiş bir birim vektör ve açıyı ayrıca gösteren bir yaklaşımla ifade etmektedir (Bakınız şekil).

**Konumlama Dizeyi**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=7) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=7)]

*Esas Makale: Dönme Dizeyi*

Dizeylerin geliştirilmesi ile Euler teorisi yeniden yazılmıştır. Dönme hareketi, dönme dizeyleri veya yönlü kosinüsdizeyleri olarak adlandırılan, ortagonal dizeyler kullanılarak tanımlanmıştır. Konum belirlemede kullanılan dizeyler, genellikle konumlama dizeyi veya irtifa dizeyi olarak isimlendirilir.

**Yukarıda belirtilen Euler vektörü, dönme dizeyinin öz yöneyidir (dönme dizeyi özgün, gerçek öz değerine sahiptir). İki dönme dizeyinin sonucu, dönmelerin bir bileşkesidir. Bu durumda konum, bir başlangıçtan itibaren oluşan dönme hareketlerinin bütünü olarak tanımlanabilir.**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=8) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=8)]

Simetrik olamayan cismin n-boyutlu bir uzayda yerleştirilmesi SO(n) × Rn, olarak tanımlanır. Cisim için konumlandırma cisim üzerine yerleştirilecek teğet vektörleri ile görselleştirilebilir. Her bir vertörün gösterdiği nokta cismin konumunu ortaya koyar.

**Kuaternion Konumlaması**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=9) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=9)]

*Esas Makale: Kuaternionlar ve uzaysal Dönüş*

Dönmeyi tanımlamanın bir başka yolu, versor olarak da tanımlanan dönme kuaternionlarının kullanılmasıdır. Kuaternionlar, dönme dizeyine ve vektörüne eşleniktir ve dönme vektörlerine kıyasla dizeylere veya dizeylerden daha kolay dönüşümü sağlanır. Konumlama için kullanıldıklarında konumlama kuaternionu veya irtifa kuarternionu olarak tanımlanır.

**Newton’un 2. kanununun üç boyutlu uzayda tanımlanması**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=10) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=10)]

Katı cisim dinamiğini üç boyutlu uzaya uyguladığınızı düşünün, Newton’un ikinci kanunun cismin hareketini ve kuvvetlerin ve torkların oluşturduğu sistemi kapsayacak bir yapıya genişletilmelidir. Newton 2. Kanununu bir parçacık için söyle açıklamıştır: “Bir cismin hareketindeki değişim, uygulanan kuvvetinbüyüklüğü ve kuvvetin uygulandığı doğrusal yön ile doğru orantılıdır.” Newton “hareketi” kütle çarpı hız olarak tanımlamaktadır, bu durumda “hareketteki değişim” de kütle çarpı ivme olarak ortaya çıkmaktadır; bu nedenle kanun söyle yazılır:

\mathbf{F} = m\mathbf{a},

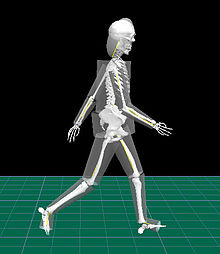
Burada, F parçacık üzerinde etki eden tek dış kuvvet olarak anlaşılmaktadır. M parçacığın kütlesi, a ivme vektörüdür. Newton 2. Kanununun katı cisimlere genişletilmesi, katı cismin katı parçacıklardan oluşan bir sistem olarak tanımlanması ile elde edilmektedir.

**Parçacıkların katı sistemi**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=11) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=11)]

N parçacıktan oluşan Pi i=1, … N, bir sistemde bütün parçacıklar katı bir cisim oluşturuyor ise, Newton’un 2. Kanunu, cismi oluşturan bu parçacıkların her birine uygulanır. Eğer Fi, mi kütleli, her bir parçacığa (Pi) uygulanan dış kuvvet ise

 \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = m_i\mathbf{a}_i,\quad i=1, \ldots, N,

Burada, Fij Pj parçacığının diğer parçacıklar ile basit mesafede duran Pi parçacığı üzerinde etki eden iç kuvvettir.

[](http://tr.wikipedia.org/wiki/Dosya:Rigid_bodies.jpg)

Human body modelled as a system of rigidbodies of geometricalsolids. Representativeboneswereaddedforbettervisualization of thewalkingperson.

Katı sistem üzerinde etki eden kuvvet denklemlerinde önemli bir sadeleştirme, sonuç kuvvet ve tork kullanımı ile elde edilmektedir. Sonuç kuvvet ve sonuç tork için kullanılan denklemler aşağıda verilmektedir.

** \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i,\quad  \mathbf{T} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i-\mathbf{R})\times \mathbf{F}_i, **[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=12) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=12)]

Burada, Ri, Pi parçacığının konumunu tanımlayan vektörü göstermektedir. Tek bir parçacık için yazılmış olan Newton’un 2. Kanunu birleştirilerek sonuç kuvveti ve sonuç torku oluşturur,

 \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{a}_i,\quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i-\mathbf{R})\times (m_i\mathbf{a}_i), 

Burada, iç kuvvetler Fij birbirini elimine eder. Katı cisim kinematiği aşağıda verilen formülü, Pi parçacığının referans parçacığınagöre vektörel R pozisyonu ve ivmelenmesi a, ayrıca açısal hız vektörü ve açısal ivmelenme vektörü olarak tanımlar:

 \mathbf{a}_i = \alpha\times(\mathbf{R}_i-\mathbf{R})  + \omega\times\omega\times(\mathbf{R}_i-\mathbf{R})  + \mathbf{a}.

**Kütle Özellikleri**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=13) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=13)]

Katı cismin kütle özellikleri kütle merkezi ve atalet dizeyi ile ifade edilir. Aşağıdaki şartları yerine getiren bir referans noktasının R seçilmesi gereklidir:

 \sum_{i=1}^N m_i(\mathbf{R}_i-\mathbf{R})=0,

bu durumda ortaya çıkan sistemin kütle merkezidir. Sitemin R referans noktasına göre atalet dizeyi [IR] aşağıdaki gibi tanımlanmış olur:

[I_R] =-\sum_{i=1}^N m_i[R_i-R][R_i-R], 

burada Ri–R konum vektöründen oluşturulan eksi-bakışımlı dizeyi [Ri–R] (ters simetrik dizey olarak da bilinmektedir), tanımlamaktadır.

**Kuvvet-Tork Denklemleri**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=14) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=14)]

Kütle ve atalet dizeylerini kullanarak oluşturulan kuvvet ve tork denklemleri aşağıdaki formu alırlar:

 \mathbf{F} = m\mathbf{a},\quad \mathbf{T}=[I_R]\alpha + \omega\times[I_R]\omega,

ve katı cisim için Newton’un 2. Kanunu olarak bilinirler.

Birbiri ile ilişkili katı cisimler dinamiği Bj, j=1, … M, her bir katı cismi izole ederek ve etkileşim kuvvetlerini ortaya koyarak denklemleştirilir. İç ve dış sonuç kuvvetleri, kuvvet-Tork denklemlerini ortaya koyar:

 \mathbf{F}_j = m_j \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{T}_j =[I_R]_j\alpha_j + \omega_j\times[I_R]_j\omega_j,\quad j=1,\ldots,M.

Newton’un yaklaşımı, M tane katı cisim için 6M denklemi ortaya çıkarır.[4]

**Katı cisim üzerinde etkili edinimsiz kuvvetlerin oluşturduğu iş**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=15) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=15)]

Bir dizi kolaylaştırıcı özelliği içeren alternatif bir yaklaşım, kuvvetlerin katı cisim üzerinde oluşturduğu edinimsiz iş kavramı kullanılarak oluşturulabilir. Kuvvetlerin tek bir katı cismin üzerindeki çeşitli noktalara etkisi nedeni ile oluşan edinimsiz işi, uygulama noktalarındaki hızlar ve sonuç kuvvet ve sonuç tork olarak hesaplanabilir. Bunu gözlemlemek için F1, F2 ... Fn ‘nin R1, R2 ... Rn noktalarında etkili olan kuvvetler olduğu varsayalım. Ri i=1, … n, gidim izleri, katı cismin hareketini tanımlar. Ri’nin gidim izi üzerindeki hızları aşağıdaki formül ile verilir:

\mathbf{V}_i = \vec{\omega}\times(\mathbf{R}_i-\mathbf{R}) + \mathbf{V},

Burada cismin açısal hız vektörüdür.

**Edinimsiz İş**[[değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&veaction=edit&vesection=16) | [kaynağı değiştir](http://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Kat%C4%B1_cisim_dinami%C4%9Fi&action=edit&section=16)]

Edinimsiz iş her bir kuvvetin, uygulandığı noktan, kendi edinimsiz yer değiştirmesi ile iç çarpımı olarak hesaplanır.

 \delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i.

Eğer katı cismin gidim izi, genelleştirilmiş koordinatların bir seti (qj, j = 1, ..., m,) olarak tanımlanır ise, bu durumda edinimsiz yer değişimler, δri , aşağıdaki denklem ile ifade edilir:

 \delta\mathbf{r}_i=\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j =\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j.

Bu sistemin kuvvetlerinin cisim üzerinde etkili olan kuvvetlerinin edinimsiz işi, genel koordinatlar olarak ifade edildiğinde:

 \delta W = \mathbf{F}_1\cdot \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) + \ldots + \mathbf{F}_n\cdot(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j)

Veya δqj katsayıları parantezinde toplandığında

 \delta W = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}_1}\right)\delta q_1 + \ldots + (\sum_{1=1}^n \mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}_m})\delta q_m. 

Olarak yazılır.

Genelleştirilmiş Kuvvetler Katı bir cismin gidim izini kolaylık olması açısından genelleştirilmiş tek bir koordinat q(mesela dönme açısı olabilir) olarak ifade edelim, bu durumda denklem;

 \delta W = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}}\right)\delta q = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial  (\vec{\omega}\times(\mathbf{R}_i-\mathbf{R}) + \mathbf{V})}{\partial \dot{q}}\right)\delta q. 

Denklem, sonuç kuvveti ve sonuç torku cinsinden yazılır ise aşağıdaki formu alır;

 \delta W = \left(\mathbf{F}\cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}} + \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}} \right)\delta q. 

Q parametresinin aşağıdaki tanımı kapsadığı;

 Q = \mathbf{F}\cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}} + \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}},

bu denklem edinimsiz yer değiştirme ile ilişkili genelleştirilmiş kuvvet olarak bilinmektedir.

Q_j = \mathbf{F}\cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_j} + \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j=1,\ldots, m.

Burada

Q_j = \mathbf{F}\cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_j} + \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j=1,\ldots, m.

Bu nokta yerçekimi veya yay kuvvetleri gibi korunmalı kuvvetlerin, potansiyel enerji olarak bilinen potansiyel fonksiyondan V(q1, ..., qn), elde edilebileceğini belirtmek yerinde olur.

 Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j=1,\ldots, m.

**Edinimsiz iş prensibinin D'Alembert formunda ifade edilmesi**

Katı cisimlerin oluşturduğu mekanik sistemlerin hareket denklemleri edinimsiz işi D'Alembert formunda ifade ederek belirlenebilir. Edinimsiz iş, katı cisimlerin durağan denge içinde olduğu sistemleri incelemek için kullanılmaktadır, ancak bu yaklaşım ivmelenme terimlerinin Newton kanunlarına eklenmesi ile genellenmiş dinamik denge yaklaşımlarında kullanılmaya başlanmıştır.

**Statik Denge**

Katı cisimlerden oluşan mekanik bir sistemde statik denge, herhangi bir yer değiştirme için uygulanan kuvvetlerin edinimsiz iş toplamının sıfır olması demektir. Bu durum edinimsiz iş prensibi olarak bilinir. Bu durum herhangi bir edinimsiz yer değiştirmeleri ifade eden genelleştirilmiş kuvvetlerin sıfır olması gerekliliğine, Qi=0, eşleniktir. Mekanik bir sistemin n tane katı cisimden Bi, i=1, … n, oluştuğunu ve her bir cisim üzerinde sonuç kuvvetinin uygulanan Kuvvet-Tork çiftinin Fi ve Ti i= 1, … n, bir sonucu olduğunu kabul edin. Bu kuvvetlerin, cisimleri bir arada tutan etkileşim kuvvetlerini kapsamadığının kabul edildiğini belirtmek gerekir. Son olarak,hızınVi ve açısal hızın ωi, i=,1...,n, her bir cisim içintek bir genel koordinat q ile tanımlandığını varsayın. Katı cisimlerden oluşan böyle bir sistemin tek serbestlik derecesi vardır. Tek serbestlik derecesi olan bir sisteme uygulanan kuvvetlerin edinimiz iş ve troku, Fi ve Ti aşağıdaki denklemle verilir;

 \delta W = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}} + \mathbf{T}_i\cdot\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}})\delta q = Q\delta q,

Burada

 Q = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}} + \mathbf{T}_i\cdot\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}}),

Tek serbestlik derecesi olan sistem üzerinde etkili genel kuvvet denklemi. Mekanik sistemin m genel koordinat qj, j=1,...,m, ile tanımlanması durumunda bu sistemin m adet serbestlik derecesi vardır.

 \delta W = \sum_{j=1}^m Q_j\delta q_j,

Burada

Q_j = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i\cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}_j} + \mathbf{T}_i\cdot\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}),\quad j=1, \ldots, m.

denklemi genelleştirilmiş koordinat qi ile ilişkilendirilmiş genel kuvvetleri ifade etmektedir.

Q_j = 0,\quad j=1, \ldots, m.

Bu m denklemleri katı cisimlerin statik denge sistemlerini tanımlar.

**Genelleştirilmiş Atalet Kuvvetleri**

Genel koordinat q ile tanımlı, sonuç kuvvet ve sonuç tork vektörlerini etkisi altında hareket eden, bir serbestlik derecesi olan tek bir katı cisim ele alınsa; sonuç kuvvet vetork vektörlerinin referans noktasının cismin kütle merkezinde olduğu kabul edildiğinde, genel atalet kuvveti Q\*, genel koordinat sistemi ile ilişkili olarak, aşağıdaki biçimde verilebilir;

 Q^* = -(M\mathbf{A})\cdot  \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}}   -   ([I_R]\alpha+ \omega\times[I_R]\omega)\cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}}.

Bu atalet kuvveti katı cismin kinetik enerjisi kullanılarak hesaplanabilir.

 T = \frac{1}{2}M\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot [I_R]\vec{\omega},  
aşağıdaki formülü kullanarak;

 Q^* = -\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} -\frac{\partial T}{\partial q}\right).M genel koordinatları olan n adet katı cisimden oluşan sistemin kinetik enerjisi aşağıdaki denklem ile verilir

T = \sum_{i=1}^n(\frac{1}{2}M\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{V}_i + \frac{1}{2}\vec{\omega}_i\cdot [I_R]\vec{\omega}_i),

ve m adet genelleştirilmişatalet kuvvetlerinin hesaplanmasında kullanılır.[6]

 Q^*_j = -\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} -\frac{\partial T}{\partial q_j}\right),\quad j=1, \ldots, m.

**Dinamik Deng**

D'Alembert formunda ifade edilen eylemsizlik prensipleri, herhangi bir yer değiştirmeye bağlı olarak, uygulanan toplam kuvvetlerin ve atalet kuvvetlerinin toplamının sıfır olması durumunda katı cisim sisteminin dinamik dengede olduğunu ifade eder. Bu durum, m genelleştirilmiş koordinatları olan n katı cisimden oluşan sistemin dinamik dengesi, herhangi bir eylemsiz yer değiştirme δqj için şöyle ifade edilir;

 \delta W = (Q_1 + Q^*_1)\delta q_1 + \ldots + (Q_m + Q^*_m)\delta q_m = 0,

Bu durum m adet denklem geliştirilmesine olanak sağlar,

Q_j + Q^*_j = 0, \quad j=1, \ldots, m,

Bu denklem ayrıca aşağıdaki formda da ifade edilebilir;

  \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} -\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1,\ldots,m.

Bunu sonucu, m adet hareket denklemden oluşan ve katı cisim sisteminin dinamiğini tanımlayan bir yapıdır.

**Lagrange Denklemleri**[

Eğer genelleştirilmiş kuvvetler Qi, potansiyel enerji denklemlerinden V(q1,...,qm) geliştirilebilirse, bu durumda geliştirilen hareket denklemleri aşağıdaki formda ifade edilir;

  \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} -\frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j=1,\ldots,m.

Bu durum için Lagrange işlevi yaklaşımın kullanılması durumunda, L=T-V, denklemler,

  \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} -\frac{\partial L}{\partial q_j} =0 \quad j=1,\ldots,m.

Bu denklemler Lagrange hareket denklemleri olarak bilinir.

Lineer ve Açısal Momentum[

**Parçacık sistemleri**[

Katı cisim sisteminin parçacıklarının doğrusal ve açısal momentumu, parçacıkların konum ve hızını kütle merkezine göre ölçülerek denklemleştirilir. Pi i=1 … n, parçacıklardan oluşan bir sistemin ri koordinatlarında ve vi hızının olduğunu Kabul edelim. R referans noktası belirlendikten sonra görece konum ve hız vektörleri belirlenir; \mathbf{r}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) + \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) + \mathbf{V}.Referans noktası R’ye göre Toplam doğrusal ve açısal momentum vektörleri

 \mathbf{p} = \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})) + (\sum_{i=1}^n m_i) \mathbf{V},

Ve

 \mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i-\mathbf{R})\times \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) + (\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i-\mathbf{R}))\times\mathbf{V}.

Eğer R kütle merkezi olarak seçilirse, denklemler aşağıdaki şekilde basitleştirilir;

 \mathbf{p} = M\mathbf{V},\quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i-\mathbf{R})\times \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}).

Parçacıkların katı cisim sistemi Bu formülleri katı cinsime özgü hale getirmek için, parçacıkların Pi i=1 …n, birbirlerine katı olarak ri koordinatlarında bağlandığı ve hızlarının violduğu varsayıldığında; R referans noktası kullanılarak görece konum ve hız vektörleri hesaplanır.

 \mathbf{r}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) + \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_i = \omega\times(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) + \mathbf{V},

Burada sistemin açısal hızıdır. [7][8][9]

Katı cisim sisteminin kütle merkezi R referans alınarak ölçülen doğrusal momentum ve açısal momentum;\mathbf{p} = (\sum_{i=1}^n m_i) \mathbf{V},\quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{R})\times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i-\mathbf{R})\times(\omega\times(\mathbf{r}_i - \mathbf{R})).Bdenklemler aşağıdaki şekilde basitleşir,

 \mathbf{p} = M\mathbf{V},\quad \mathbf{L} =  [I_R]\omega,

Burada M sistemin toplam kütlesini ve [IR]’de atalet moment dizeyini gösterir, atalet momenti aşağıdaki denklem ile verilmiştir.

 [I_R] = -\sum_{i=1}^n m_i[r_i-R][r_i-R],

Burada [ri-R] eksi-bakışımlı (veya ters simetrik) dizeyi, ri-R vektöründen oluşturulmuş,Uygulamaları[

•Robotik Sistemlerin Analizi

•İnsanlar, Hayvanlar ve humonoidlerin biyomekanik analizleri

•Uzaydaki cisimlerin analizleri

•Dinemaik tabanlı duyaçların tasarımı ve geliştirilmesi, jiroskokip duyaçlar vb.

•Otomobillerde çeşitli denge arttırıcı tasarım ve uygulamaların geliştirilmesi

•Bilgisayar oyunlarında katı cisim içeren grafik uygulamalarının geliştirilmesi

Ayrıca İnceleyin[

•Analitik Mekanik

•Analitik Dinamik

•Varyasyon Kalkülüsü

•Klasik Mekanik

•Dinamik (Fizik)

•Klasik Mekanik Tarihi

•Langrange İşlevi Mekanik

•Lagrange İşlevi

•Hamilton Mekaniği

•Katı cisim

•Katı Rotor

•Yumuşak cisim Dinamiği

Çoklu cisim Dinamiği

•Polhode

•Herpolhode

•Devinim

•Poinsot’unİnşaası

•Jiroskop

Makina Fiziği

•Fiziksel İşlem Birimi

•Fizik Soyutlama Katmanı – Birleştirilmiş çoklu gövde benzetim cihazı

•Dynamechs – Katı cisim benzetim cihazı

•RigidChips – Japon katı cisim benzetim cihazı